Задание 1

Железнодорожный билет для взрослого стоит 840 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 18 школьников и 3 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

Решение.

Билет для ребенка стоит $840 \cdot 0{,}5 = 420$ руб. Стоимость билетов на 18 школьников и 3 взрослых составляет $420 \cdot 18 + 840 \cdot 3 = 7560 + 2520 = 10\,080$ руб.

Ответ: 10 080.

Задание 2

Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 10 спортсменов из России, в том числе Руслан Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России.

Решение.

В первом туре Руслан Орлов может сыграть с $26 - 1 = 25$ бадминтонистами, из которых $10 - 1 = 9$ из России. Значит, вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России, равна

9/25=0,36.

Ответ: 0,36.

Задание 3

Решите уравнение $\frac{x+8}{5x+7}=\frac{x+8}{7x+5}$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Решение.

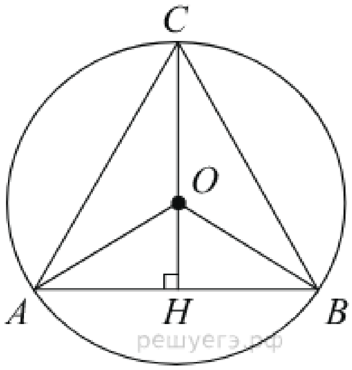
Заметим, что числители дробей равны. Имеем:

$$\frac{x+8}{5x+7}=\frac{x+8}{7x+5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+8=0;\\5x+7=7x+5,7x+5\neq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-8;\\x=1.\end{array}\right.$$

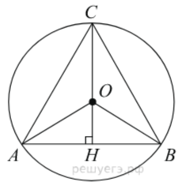
О т в е т: 1.

Задание 4

Высота правильного треугольника равна 3. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



Высота правильного треугольника равна 3. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



Решение:

Треугольник ABC правильный, значит, все углы равны по 60°. По теореме синусов имеем:

$$R=\frac{AC}{2\sin B}=\frac{CH}{2\sin A\cdot\sin B}=\frac{3}{2\sin^2 60^\circ}=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}=2.$$

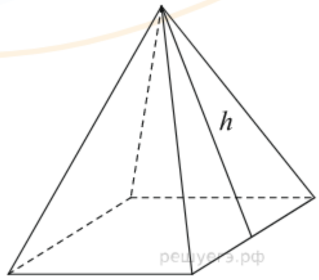
Ответ: 2.

Приведём другое решение.

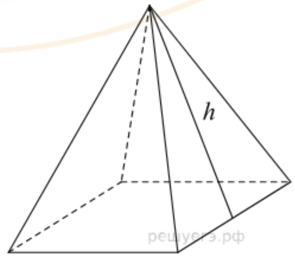
В правильном треугольнике радиус описанной окружности равен двум третим высоты. Поэтому он равен 2.

Задание 5

Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.



Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.



Решение.

Площадь пирамиды равна

$$S = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = ph + a^2.$$

Полупериметр основания $p = 20$, апофему h найдем по теореме Пифагора: $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. Тогда площадь поверхности пирамиды

$$S = 20 \cdot 12 + 10^2 = 340.$$

Ответ: 340.

Задание 6

Найдите значение выражения $\dfrac{5(m^4)^3 + 3(m^3)^4}{(2m^6)^2}$.

$$\frac{5m^{12}+3m^{12}}{4m^{12}}=\frac{8m^{12}}{4m^{12}}=2.$$

Задание 7

Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

Решение.

Пусть масса первого сплава m_1 кг, а масса второго –m_2 кг. Тогда массовое содержание никеля в первом и втором сплавах $0{,}1m_1$ и $0{,}3m_2$ соответственно. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = 200, \\ 0,1m_1 + 0,3m_2 = 0,25 \cdot 200, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_2 = 200 - m_1, \\ 0,1m_1 + 0,3(200 - m_1) = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_2 = 200 - m_1, \\ 0,2m_1 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 50, \\ m_2 = 150. \end{cases}$$

Таким образом, первый сплав легче второго на 100 килограммов.

Ответ: 100.

Задание 8

Найдите наименьшее значение функции $y=\sqrt{x^2-6x+13}$.

Найдите наименьшее значение функции $y=\sqrt{x^2-6x+13}$.

Решение.

Выделим полный квадрат:

$$y=\sqrt{x^2-6x+13}=\sqrt{(x-3)^2+4}.$$

Отсюда имеем:

$$y=\sqrt{(x-3)^2+4}\geq\sqrt{4}=2.$$

Поэтому наименьшее значние функции достигается в точке 3, и оно равно 2.

Ответ: 2.

Задание 9

а) Решите уравнение $\dfrac{2\sin^2 x - \sin x}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0.$

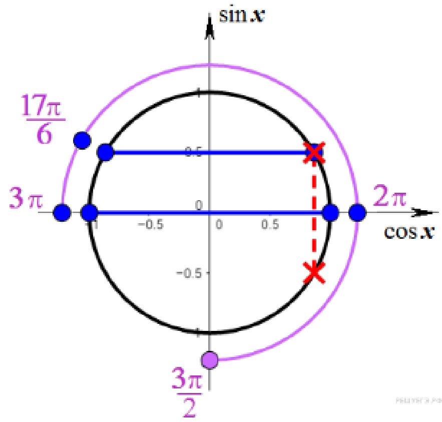
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}, 3\pi\right]$.

а) Решите уравнение $\dfrac{2\sin^2 x-\sin x}{2\cos x-\sqrt{3}}=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2},\,3\pi\right]$.

Решение.

а) Левая часть уравнения определена при $\cos x\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то есть при $x\neq\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\,k\in\mathbb{Z}$. Числитель дроби должен быть равен нулю:



$$2\sin^2 x-\sin x=0\Leftrightarrow\sin x(2\sin x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\end{array}\right.\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Серию $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\,k\in\mathbb{Z}$ нужно отбросить. Получаем ответ: $x=\pi k,\,x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\,k\in\mathbb{Z}$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, лежащие на отрезке $\left[\dfrac{3\pi}{2},\,3\pi\right]$. Получим числа: $2\pi,\,\dfrac{17\pi}{6},\,3\pi.$

Ответ: а) $\left\{\pi k,\,\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k:\,k\in\mathbb{Z}\right\}$, б) $2\pi;\,\dfrac{17\pi}{6};\,3\pi.$

Задание 10

Решите неравенство $\left(2x+1-\frac{6}{x}\right)\left(\frac{28}{x+2}-2+\left(\sqrt{-3-2x}\right)^2\right)\geq 0.$

Решите неравенство $\left(2x+1-\frac{6}{x}\right)\left(\frac{28}{x+2}-2+\left(\sqrt{-3-2x}\right)^2\right)\geq 0.$

Решение.

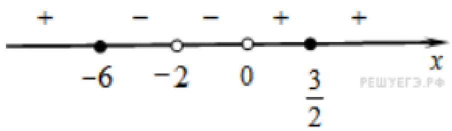
Данное неравенство эквивалентно системе неравенств:

$$\begin{cases} -3-2x\geq 0, \\ \dfrac{2x^2+x-6}{x}\cdot\dfrac{28-2x-4+(x+2)(-3-2x)}{x+2}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq -\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{(x+2)(2x-3)}{x}\cdot\dfrac{28-2x-4-2x^2-7x-6}{x+2}\geq 0. \end{cases}$$

Решим второе неравенство методом интервалов:

$$\begin{cases} \dfrac{2x-3}{x}(-2x^2-9x+18)\geq 0, \\ x\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-3}{x}\cdot(-2)(x+6)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\geq 0, \\ x\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(2x-3)^2(x+6)}{x}\leq 0, \\ x\neq -2. \end{cases}$$

Отметим на прямой точки как показано на рисунке:



Учитывая неравенство $x\leq -\frac{3}{2}$, получаем решение: $[-6;\ -2)\cup\left(-2;\ -\frac{3}{2}\right].$

Ответ: $[-6;\ -2)\cup\left(-2;\ -\frac{3}{2}\right].$